

Fattorizzazione dei Numeri Naturali

Considerazioni derivanti da una rappresentazione

1. Definizione

Il teorema fondamentale dell'aritmetica enuncia che ogni numero naturale $m > 1$ è fattorizzabile univocamente nella forma:

$$m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

dove $p_1, p_2, \dots, p_k > 1$ sono i fattori primi (di norma distinti tra loro) e $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$ i rispettivi esponenti naturali.

Al fine di conoscere il *grado di scomposizione* di m , ovvero di quante parti è composto m rispetto all'operazione *prodotto*, si definisce **ordine di fattorizzazione di m** , $\Omega(m)$ (rif. Almost Prime), la somma di tutti gli esponenti, qui intesi come numero di ricorrenze di ciascun fattore:

$$\Omega(m) \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

nella Tab. 1 sono mostrati i primi valori di $\Omega(m)$ $1 < m < 100$.

m	$\Omega(m)$	m	$\Omega(m)$	m	$\Omega(m)$	m	$\Omega(m)$	m	$\Omega(m)$
2	1	22	2	42	3	62	2	82	2
3	1	23	1	43	1	63	3	83	1
4	2	24	4	44	3	64	6	84	4
5	1	25	2	45	3	65	2	85	2
6	2	26	2	46	2	66	3	86	2
7	1	27	3	47	1	67	1	87	2
8	3	28	3	48	5	68	3	88	4
9	2	29	1	49	2	69	2	89	1
10	2	30	3	50	3	70	3	90	4
11	1	31	1	51	2	71	1	91	2
12	3	32	5	52	3	72	5	92	3
13	1	33	2	53	1	73	1	93	2
14	2	34	2	54	4	74	2	94	2
15	2	35	2	55	2	75	3	95	2
16	4	36	4	56	4	76	3	96	6
17	1	37	1	57	2	77	2	97	1
18	3	38	2	58	2	78	3	98	3
19	1	39	2	59	1	79	1	99	3
20	3	40	4	60	4	80	5
21	2	41	1	61	1	81	4

Tab. 1

			99		
			98		
96					97
				95	
				94	
				93	
			92		
				91	
		90			
		88			89
				87	
				86	
				85	
		84			
				82	83
		81			
80					
			78		79
				77	
			76		
			75		
				74	
					73
72					
			70		71
				69	
			68		
					67
			66		
				65	
64			63		
				62	
					61
		60			59
				58	
				57	
		56			
				55	
		54			
					53
			52		
				51	
			50		
				49	
48					47
				46	
			45		
			44		
					43
			42		
					41
		40			
				39	
				38	
		36			37
				35	
				34	
				33	
32					
					31
			30		
					29
			28		
			27		
				26	
				25	
		24			
					23
				22	
				21	
			20		
					19
			18		
					17
		16			
				15	
				14	
					13
			12		
					11
				10	
				9	
			8		
					7
				6	
					5
				4	
					3
					2
6° o.f.	5° o.f.	4° o.f.	3° o.f.	2° o.f.	1° o.f.

Tab. 2

2. Rappresentazione

Nella Tab. 2 i numeri della Tab. 1 sono distribuiti in una struttura righe-colonne in cui alle righe sono associati i numeri naturali e le colonne identificano per ogni m , da destra a sinistra, gli ordini di fattorizzazione $\Omega(m)$ $1 < m < 100$.

In tal modo i numeri naturali (>1) vengono individuati, oltre che con la loro sequenza naturale, anche con un secondo parametro e possono essere organizzati e raggruppati in classi (i.e. stesso ordine di fattorizzazione).

Ogni numero m può essere fattorizzato, al massimo, come una potenza di 2. Di conseguenza la classe più alta che m può occupare è $\log_2 m$; più precisamente $\text{floor}(\log_2 m)$, dove floor è la parte intera inferiore (a volte indicata racchiusa tra $\lfloor \rfloor$), ovvero il numero intero più vicino \leq .

La prima colonna (1° ordine di fattorizzazione) è la classe dei numeri primi, e.g. la quarta colonna (4° ordine di fattorizzazione) è la classe dei numeri quarti che inizia con 16, 24 e 36 in quanto $16=2^4$ cioè $\Omega(16)=4$, $24=2^3 \cdot 3^1$ cioè $\Omega(24)=4$ e $36=2^2 \cdot 3^2$ cioè $\Omega(36)=4$. Così per i numeri delle altre classi.

Quindi: i numeri secondi, i numeri terzi, quarti, quinti, sestì, ... n-simi ...

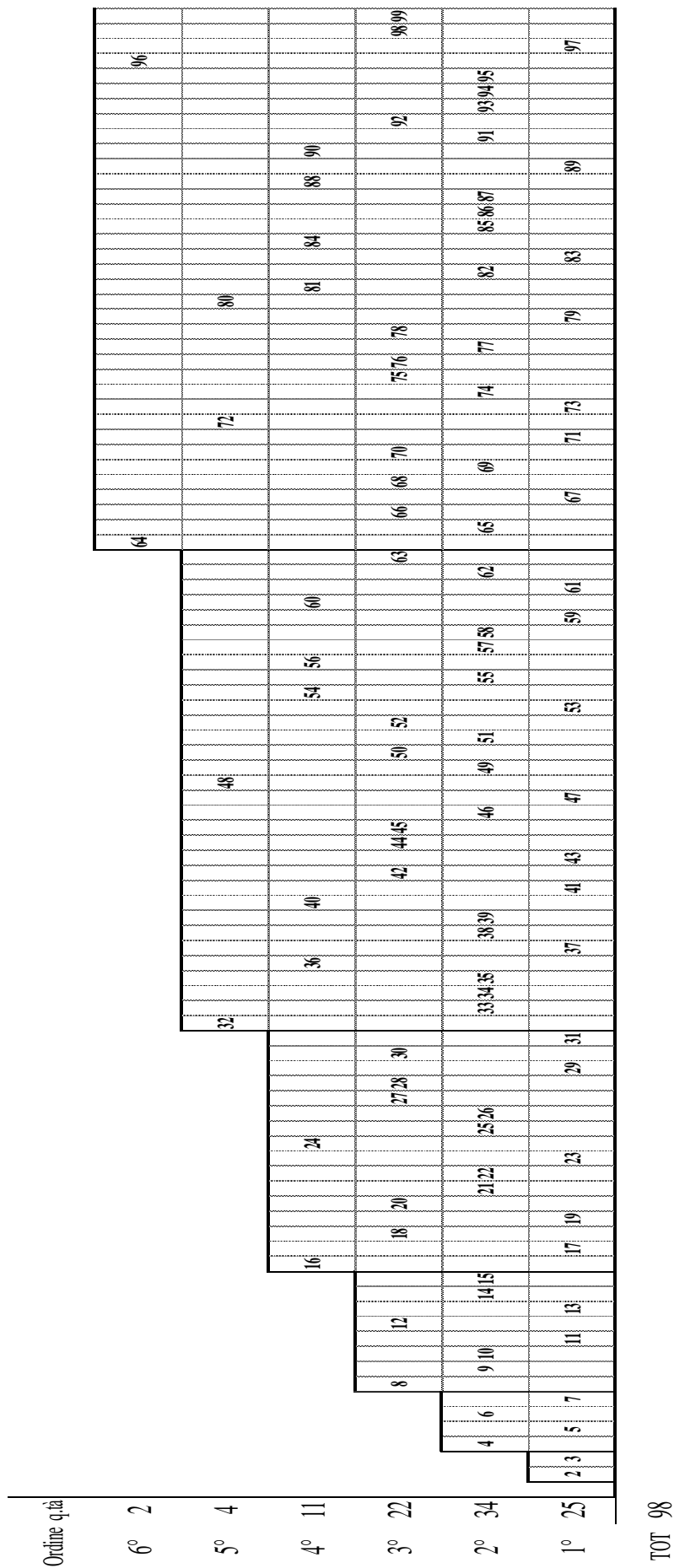


Fig. 1

(Nota. Per motivi di spazio limitato la Fig. 1 è posizionata in verticale, pertanto le righe vanno dal basso verso l'alto)

Al fine di visualizzare meglio la struttura della Tab. 2, nella Fig. 1 è stata rappresentata, con un diagramma a *caselle* (posizioni unitarie), la distribuzione dei numeri dal 2 al 99.

Ogni livello (riga) identifica un ordine di fattorizzazione k (da qui in poi *o.f.*) ed inizia con il valore 2^k per qualche k .

La Fig. 1 evidenzia per la distribuzione un andamento a *scalini*: rettangoli di base 2^i e altezza i (quanto gli *o.f.* coinvolti):

- l' i -esimo scalino ha come primo valore 2^i , contiene 2^i numeri e si sviluppa, ovviamente, su $2^i \cdot i$ *caselle*; la densità dei numeri rispetto alle caselle è:

$$d = 2^i / (2^i \cdot i) = 1/i$$

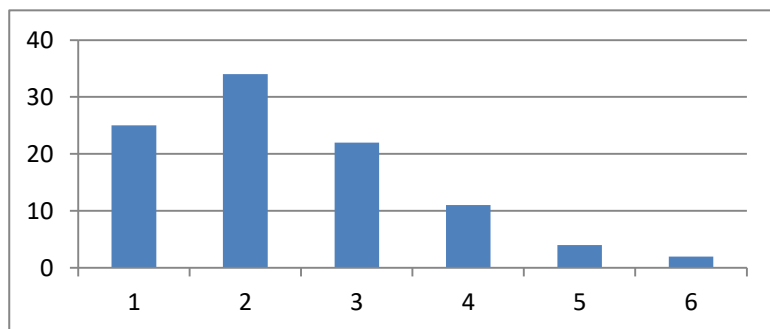
- l' i -esimo scalino è strutturato su i *livelli* (tanti quanti gli *o.f.*)
- in ogni scalino il livello superiore contiene soltanto due numeri 2^i e $2^{i-1} \cdot 3$
- il livello di base di ogni scalino (relativo al 1° *o.f.*) contiene solamente numeri primi.

Questa rappresentazione non è altro che un ampliamento bidimensionale di quella classica che rappresenta i numeri naturali come una sequenza in posizioni unitarie:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	

Supposizione: in ogni livello di ogni scalino sono presenti almeno due numeri.

Alla sinistra dell'asse delle ordinate sono indicati gli *o.f.* e le quantità di numeri naturali $1 < m < 100$ appartenenti allo stesso *o.f.*: i numeri primi sono 25, i numeri secondi 34, i numeri terzi 22, i numeri quarti 11, i numeri quinti 4, i numeri sestì 2



Le quantità tendono a decrescere in quanto, con $n = 99$, i livelli più alti sono meno popolati.

Il grafico della Fig.2 rappresenta la crescita della cardinalità di ogni classe $[k]$ di numeri (< 100) con identico *o.f.* (nella figura vengono mostrate le crescite delle classi relative ai primi 6 *o.f.*).

La crescita della cardinalità $[1]$, quantità dei numeri del 1° ordine (numeri primi), è rappresentato con la doppia linea; essa viene superata, tra il 25 ed il 33, dalla crescita di quelli della cardinalità $[2]$.

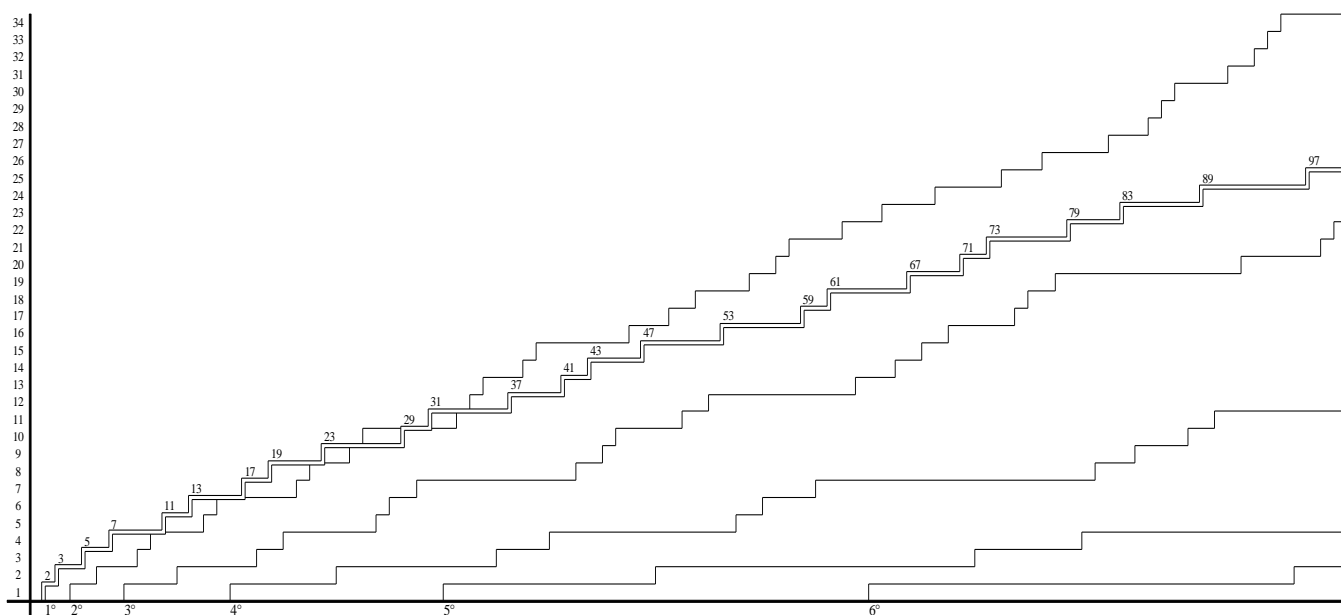


Fig. 2

Nella Fig.3 sono rappresentati alcuni tratti della distribuzione dei numeri da 2 a $n=3500$ nelle varie classi $[k]$, $1 \leq k \leq \text{floor}(\log_2 n)$.

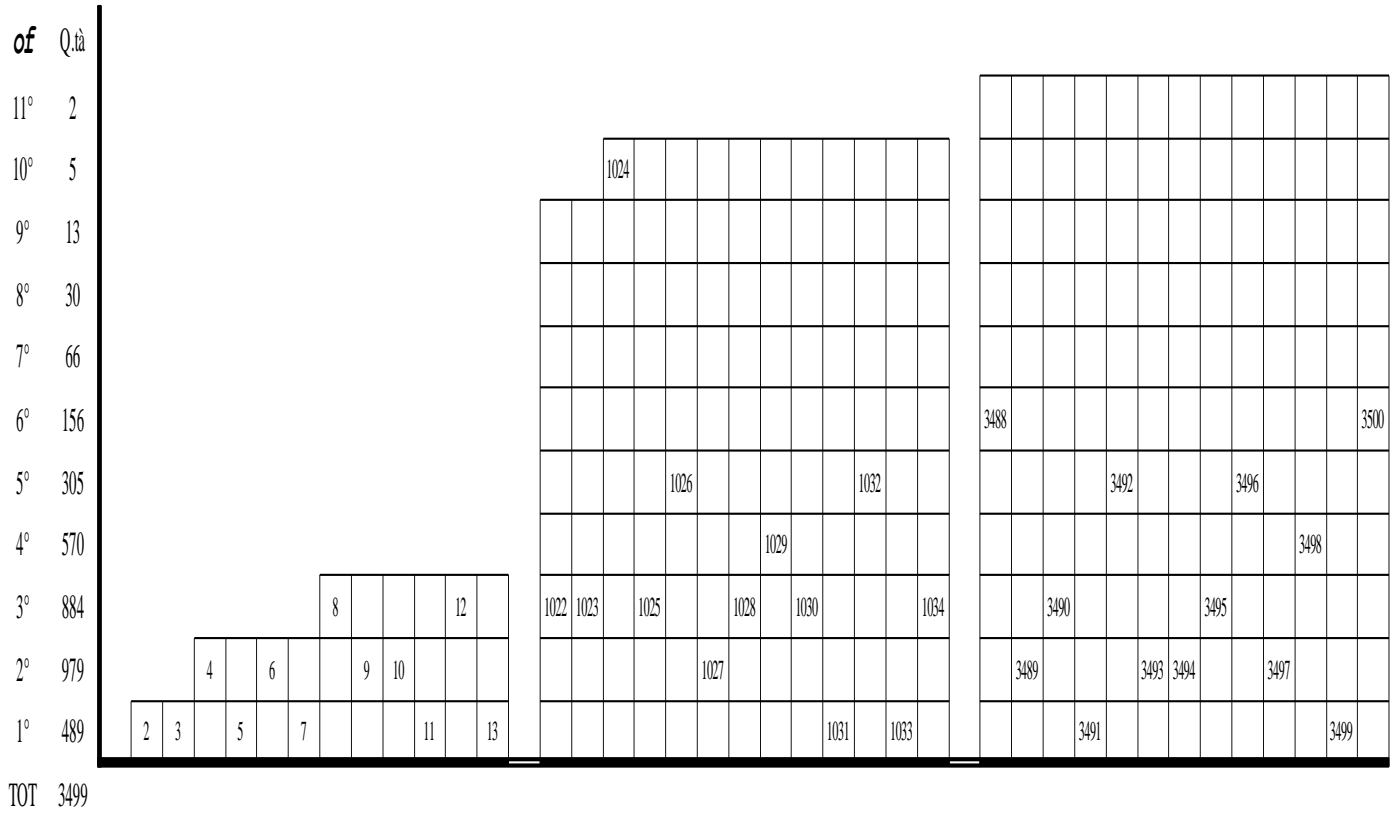


Fig. 3

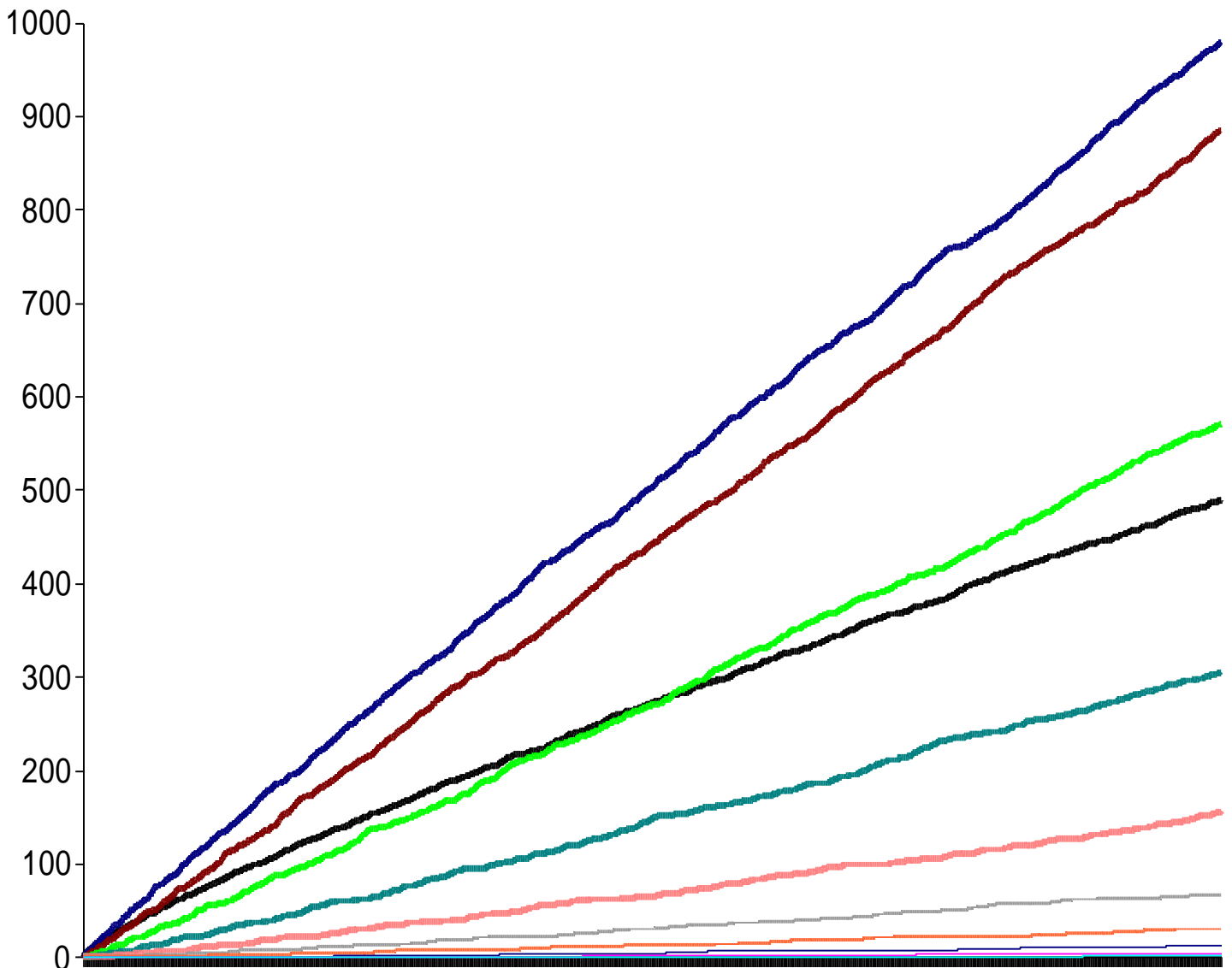
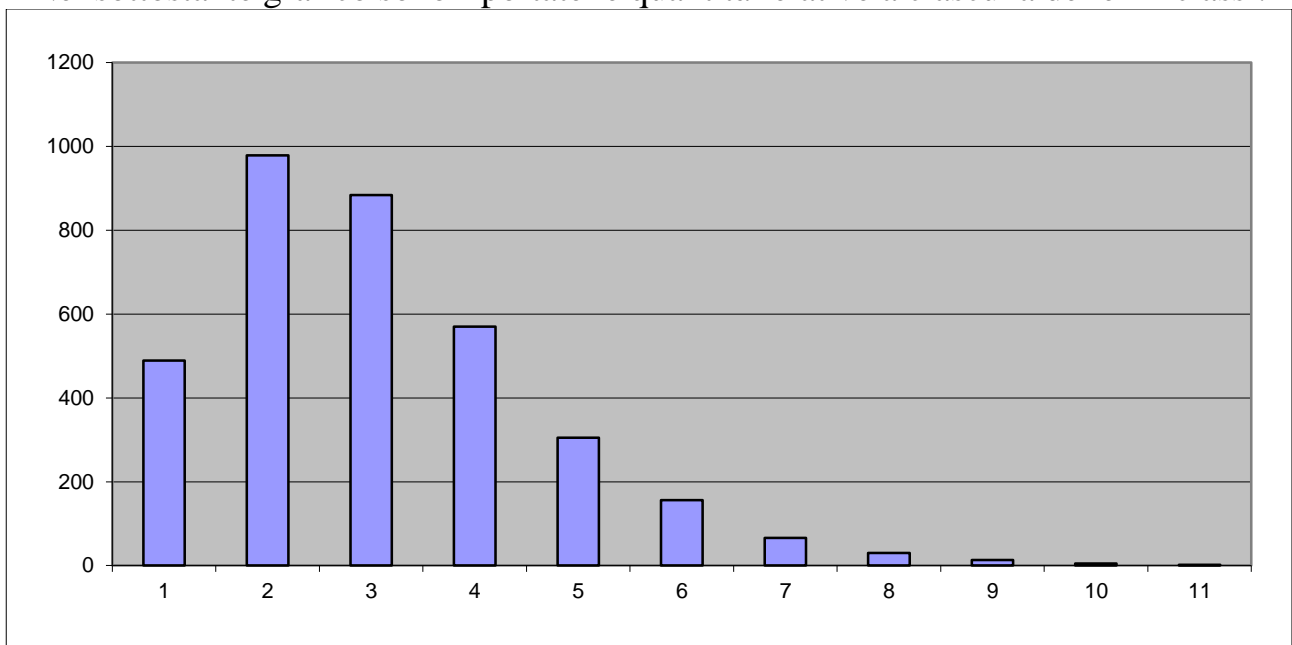


Fig. 4

Nel sottostante grafico sono riportate le quantità relative a ciascuna delle 11 classi.



La Fig. 4 visualizza graficamente la crescita della cardinalità delle prime 11 classi $[k]$, $1 \leq k \leq 11$, ciascuna relativa al corrispondente *o.f.*, per i numeri da 2 a $n=3500$ (come in Fig. 3):

- l'andamento di tali cardinalità è un ventaglio di linee divergenti (così sembra) in rappresentanza delle classi relative agli *o.f.* dal 2° (la prima in alto) sino alla linea dell'undicesimo ordine (le ultime linee non si distinguono bene);
- la linea che rappresenta la crescita dei numeri primi è nera; essa viene superata subito dalla linea del 2° ordine e, successivamente, dalle linee del 3° e 4° ordine;
- la linea del 2° ordine supera quella dei numeri primi tra il 25 ed il 33;
- la linea del 3° ordine supera quella dei numeri primi tra il 125 ed il 170;
- la linea del 4° ordine supera quella dei numeri primi tra il 1809 ed il 1814;
- l'ultimo ordine, ovvero $\Omega(n)$, (in questo caso l'undicesimo, perché $\log_2 3500 = 11.77$) contiene o 1 o 2 elementi e precisamente

$$\text{floor}(n/(3 \cdot 2^{\Omega(n)-1})) + 1$$

A maggior evidenza, nella Fig.5 ($n=16384$) si vede come anche $\Omega_5(m)$ tenda a superare $\Omega_1(m)$ mentre $\Omega_3(m)$ supera $\Omega_2(m)$.

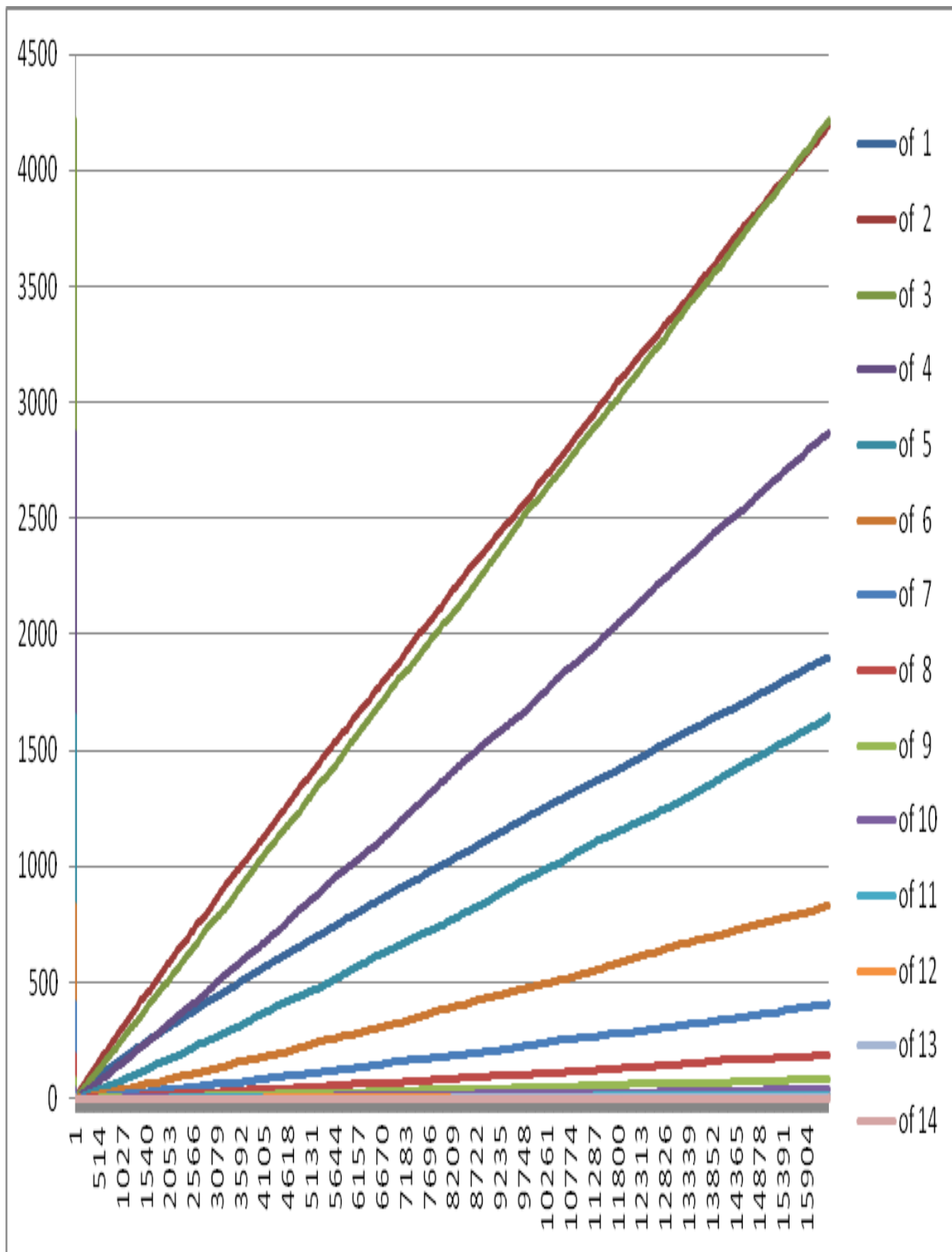
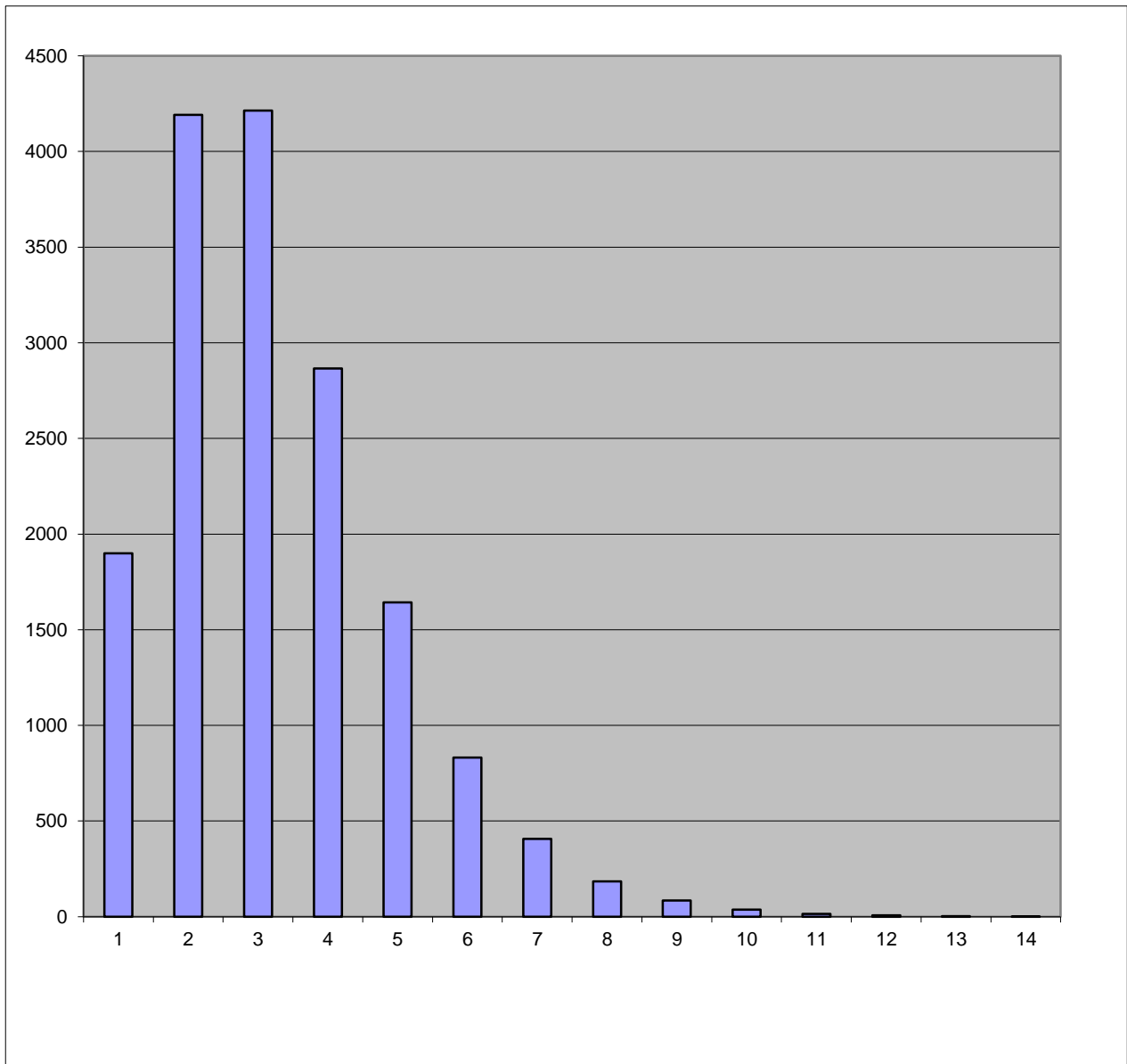


Fig. 5

Nel sottostante grafico sono riportate le quantità relative a ciascuna delle 14 classi.



Le cardinalità relative alle classi $[k]$ associate a ciascun *o.f.* k , mostrano una distribuzione che sembra assomigliare ad una bernoulliana di parametri da determinare.

Ascisse: $\Omega_k(m)$

Ordinate: Π_k

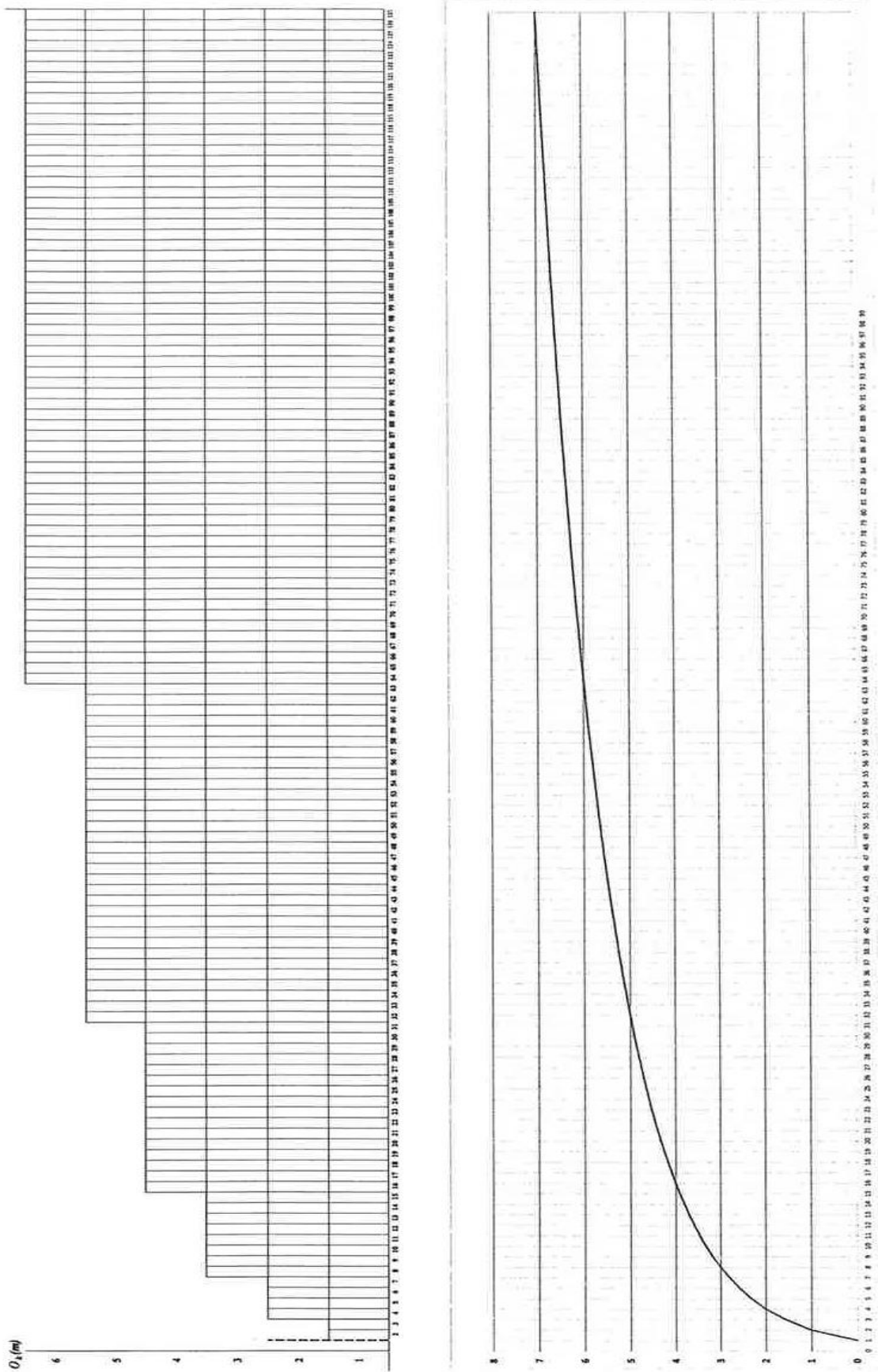


Fig. 6

3.1 Forma e appartenenza

Da quanto detto in **2. Rappresentazione**, \forall intero $m \leq n$ il massimo *o.f.* possibile è, ovviamente, $\Omega(m) = \log_2 m$; tale andamento descrive, come in Fig. 6, un'area logaritmica $\int_{1,n} \log_2 m \cdot dm \rightarrow ((1/\ln(2)) \cdot \int_{1,n} \ln(m) \cdot dm)$; inoltre, ipotizzando una distribuzione uniforme, è ragionevole supporre che

$$1) \quad 1/\Omega(m) = 1/\log_2 m$$

indichi la “probabilità” che un numero m appartenga all' i -esimo *o.f.* ($1 \leq i \leq \Omega_{Max}(n)$).

3.2 Calcoli

Da 1) discende che la quantità di numeri teoricamente appartenenti allo stesso *o.f.* i è

$$2) \quad \Pi_i(n) = \sum_{j=2^i, \dots, n} 1/\log_2 j$$

la 2), per n sufficientemente grande, potrebbe essere scritta

$$3) \quad \begin{aligned} \Pi_i(n)_{n \rightarrow \infty} &\equiv \int_{2^{-1,n}}^i 1/\log_2 m \cdot dm && \rightarrow \\ &\rightarrow \ln(2) \cdot \int_{2^{-1,n}}^i 1/\ln(m) \cdot dm \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la quantità di numeri appartenenti al 1° *o.f.* (numeri primi), si azzarda, in base alla Fig. 1, una modalità basata sul confronto tra la densità dei numeri del 1° *o.f.* e la densità di tutti i numeri, in relazione alla “area” rispettivamente occupata:

$$q.tà \text{ numeri del } 1^\circ \text{ ordine} / \text{area occupata dal } 1^\circ \text{ livello} \equiv q.tà \text{ totale numeri} / \text{area totale occupata}$$

sostituendo:

$$\Pi_1(n) / (n-1) = (n-1) / ((1/\ln(2)) \cdot \int_{1,n} \ln(m) \cdot dm) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \Pi_1(n) = (n-1)^2 / ((1/\ln(2)) \cdot \int_{1,n} \ln(m) \cdot dm) \quad \rightarrow$$

$$4) \quad \rightarrow \Pi_1(n) = (n-1)^2 / ((1/\ln(2)) \cdot (n \cdot \ln(n) - n + 1))$$

Nella Tab. 3 si confronta tale formula con alcune formule famose; anche se lo scarto è notevole, tende a stabilizzarsi.

<i>n</i>	numero di primi $\pi(n)$ compresi fra 2 e <i>n</i>	Previsione con formula di Gauss: $n/\ln(n)$	Scarto	Previsione con formula di Legendre: $n/(\ln(n)-1,08366)$	Scarto	Previsione con formula: $(n-1)^2 / ((1/\ln(2))^{n*\ln(n)-n+1})$	Scarto
1	1,E+01	4	0%	8	100%	4	0,0000%
2	1,E+02	25	-12%	28	12%	19	-24,0000%
3	1,E+03	168	-14%	172	2%	117	-30,3571%
4	1,E+04	1229	-12%	1231	0,16%	844	-31,3263%
5	1,E+05	9592	-9%	9588	-0,04%	6593	-31,2656%
6	1,E+06	78498	-8%	78543	0,06%	54086	-31,0989%
7	1,E+07	664579	-7%	665140	0,08%	458488	-31,0108%
8	1,E+08	5761455	-6%	5768004	0,11%	3978875	-30,9398%
9	1,E+09	50847534	-5%	50917519	0,14%	35143631	-30,8843%
10	1,E+10	455052511	-5%	455743004	0,15%	314697118	-30,8438%
11	1E+11	4118054813	-4%	4124599869	0,16%	2849123470	-30,8139%
12	1E+12	37607912018	-4%	37668527415	0,16%	26027810858	-30,7917%
13	1E+13	346065536839	-3%	346621096885	0,16%	239564738510	-30,7747%
14	1E+14	3204941750802	-3%	3210012022164	0,16%	2219051528595	-30,7616%
15	1E+15	29844570422669	-3%	29890794226982	0,15%	20667038427351	-30,7511%
16	1E+16	279238341033925	-3%	279660033612131	0,15%	193393094398453	-30,7426%
17	1E+17	2623557157654230	-3%	2627410589445920	0,15%	1817187896616470	-30,7357%
18	1E+18	24739954287740800	-2%	24775244142175600	0,14%	17137370050627900	-30,7300%
19	1E+19	234057667276344000	-2%	234381646366461000	0,14%	162143041302985000	-30,7252%
20	1E+20	2220819602560910000	-2%	2223801523570830000	0,13%	153855937055550000	-30,7211%
22	1E+22	201467286689315906290	-2%	201721849105667000000	0,13%	139587362635261000000	-30,7146%

Valori migliori

Tab. 3

La formula 4) è caratterizzata dalla costante $1/\ln(2)$; se si pone la variabile x come argomento del logaritmo naturale e si calcola in base ai valori effettivi di $\prod(n)$ si vede che $x \rightarrow e$ ed il valore $1/\ln(2) \rightarrow 1$.

<i>n</i>	numero di primi $\pi(n)$ compresi fra 2 e <i>n</i>	Determinazione di x da formula: $(n-1)^2 / ((1/\ln(x))^{n*\ln(n)-n+1})$
1	1,E+01	1,998975129
2	1,E+02	2,514674058
3	1,E+03	2,703802757
4	1,E+04	2,743583643
5	1,E+05	2,741268962
6	1,E+06	2,734624243
7	1,E+07	2,731134516
8	1,E+08	2,728316364
9	1,E+09	2,726120217
10	1,E+10	2,724518942
11	1E+11	2,723337991
12	1E+12	2,722463310
13	1E+13	2,721797198
14	1E+14	2,721278309
15	1E+15	2,720866441
16	1E+16	2,720534130
17	1E+17	2,720262113
18	1E+18	2,720036623
19	1E+19	2,719847615
20	1E+20	2,719687615
22	1E+22	2,719433340

$e = 2,718282$

Di conseguenza con la formula

4a) $\prod_l(n) = (n-1)^2 / (n \cdot \ln(n) - n + 1)$ si ottengono scarti migliori:

<i>n</i>	numero di primi $\pi(n)$ compresi fra 2 e <i>n</i>	Previsione con formula di Gauss: $n/\ln(n)$	Scarto	Previsione con formula di Legendre: $n/(\ln(n)-1,08366)$	Scarto	Previsione con formula: $(n-1)^2/(n \cdot \ln(n)-n+1)$	Scarto
1,E+01	4	4	0%	8	100%	6	50%
1,E+02	25	22	-12%	28	12%	27	8%
1,E+03	168	145	-14%	172	2%	169	0,59523809524%
1,E+04	1229	1086	-12%	1231	0,16%	1218	-0,89503661513%
1,E+05	9592	8686	-9%	9588	-0,04%	9512	-0,83402835696%
1,E+06	78498	72382	-8%	78543	0,06%	78030	-0,59619353359%
1,E+07	664579	620421	-7%	665140	0,08%	661459	-0,46947014576%
1,E+08	5761455	5428681	-6%	5768004	0,11%	5740304	-0,36711212706%
1,E+09	50847534	48254942	-5%	50917519	0,14%	50701542	-0,28711716875%
1,E+10	455052511	434294482	-5%	455743004	0,15%	454011971	-0,22866372009%
1E+11	4118054813	3948131654	-4%	4124599869	0,16%	4110416301	-0,18548835183%
1E+12	37607912018	36191206825	-4%	37668527415	0,16%	37550193650	-0,15347400295%
1E+13	346065536839	334072678387	-3%	346621096885	0,16%	345618860221	-0,12907284039%
1E+14	3204941750802	3102103442166	-3%	3210012022164	0,16%	3201414635781	-0,11005239082%
1E+15	29844570422669	28952965460217	-3%	29890794226982	0,15%	29816233849001	-0,09494716549%
1E+16	279238341033925	271434051189532	-3%	279660033612131	0,15%	279007258230820	-0,08275468270%
1E+17	2623557157654230	2554673422960300	-3%	2627410589445920	0,15%	2621647966812030	-0,07277107863%
1E+18	24739954287740800	24127471216847300	-2%	24775244142175600	0,14%	24723998785920000	-0,06449285086%
1E+19	234057667276344000	228576043106975000	-2%	234381646366461000	0,14%	233922961602470000	-0,05755234402%
1E+20	2220819602560910000	2171472409516260000	-2%	2223801523570830000	0,13%	2219671974013730000	-0,05167590136%
1E+22	201467286689315906290	197406582683296000000	-2%	201721849105667000000	0,13%	201381995844660000000	-0,04233483562%

Valori migliori

Tab. 4a

<i>n</i>	numero di primi $\pi(n)$ compresi fra 2 e <i>n</i>	Previsione con formula: $(n-1)^2/(n \cdot \ln(n)-n+1)$	Scarto	Previsione con formula: $n/(\ln(n)-1)$	Scarto	Previsione con formula: $Li()$	Scarto
1,E+01	4	6	50%	8	100%	6	50%
1,E+02	25	27	8%	28	12%	30	20%
1,E+03	168	169	0,60%	169	0,60%	178	5,95238095238%
1,E+04	1229	1218	-0,90%	1218	-0,90%	1246	1,38323840521%
1,E+05	9592	9512	-0,83%	9512	-0,83%	9630	0,39616346956%
1,E+06	78498	78030	-0,60%	78030	-0,60%	78628	0,16560931489%
1,E+07	664579	661459	-0,47%	661459	-0,47%	664918	0,05100973699%
1,E+08	5761455	5740304	-0,37%	5740304	-0,37%	5762209	0,01308697195%
1,E+09	50847534	50701542	-0,29%	50701542	-0,29%	50849235	0,00334529498%
1,E+10	455052511	454011971	-0,23%	454011971	-0,23%	455055615	0,00068211908%
1E+11	4118054813	4110416301	-0,19%	4110416301	-0,19%	4118066401	0,00028139499%
1E+12	37607912018	37550193650	-0,15%	37550193650	-0,15%	37607950281	0,00010174189%
1E+13	346065536839	345618860221	-0,13%	345618860221	-0,13%	346065645810	0,00003148854%
1E+14	3204941750802	3201414635781	-0,11%	3201414635781	-0,11%	3204942065692	0,00000982514%
1E+15	29844570422669	29816233849001	-0,09%	29816233849001	-0,09%	29844571475288	0,00000352700%
1E+16	279238341033925	279007258230820	-0,08%	279007258230820	-0,08%	279238344248557	0,00000115121%
1E+17	2623557157654230	2621647966812030	-0,07%	2621647966812030	-0,07%	2623557165610820	0,00000030327%
1E+18	24739954287740800	24723998785920000	-0,06%	24723998785920000	-0,06%	24739954507236400	0,00000088721%
1E+19	234057667276344000	233922961602470000	-0,06%	233922961602470000	-0,06%	234057667376222000	0,00000004267%
1E+20	2220819602560910000	2219671974013730000	-0,05%	2219671974013730000	-0,05%	2220819602583650000	0,0000000102%
1E+22	201467286689316000000	201381995844660000000	-0,04%	201381995844660000000	-0,04%	201467286691247000000	0,0000000096%

Valori migliori

Tab. 4b

La Tab. 4b evidenzia come la formula $Li()$ sia decisamente più precisa della formula 4a) usata nella Tab. 4a, la quale, pur fornendo risultati simili alla più semplice formula alla sua destra, evidenzia una particolarità interessante di cui appresso. Vengono tralasciati i risultati con l’algoritmo di Riemann: estremamente migliori!

La rappresentazione proposta permette di *vedere*, in modo evidente, il perché della formulazione di alcune leggi importanti senza necessità di dimostrazioni.

Con tale approssimazione le formule precedenti diverrebbero:

$$1a) \quad 1/\Omega(m) = 1/\ln(m)$$

$$2a) \quad \prod_i(n) = \sum_{j=2, \dots, n}^i 1/\ln(j)$$

$$3a) \quad \prod_i(n)_{n \rightarrow \infty} = \int_{2^{-1}, n}^i 1/\ln(m) \cdot dm \equiv Li(n)$$

(la formula del logaritmo integrale di Gauss)

$$4a) \quad \prod_I(n) = (n-1)^2 / (n \cdot \ln(n) - n + 1)$$

(dimensionalmente coerente con le leggi di Legendre e di Gauss. Vedere Tab. 4a)

3.3 Evidenza

Il grafico della Fig. 7a rappresenta l'andamento della funzione:

$$y = n/x \quad \text{con } x \equiv (1, n) \quad \text{per } n = 29$$

che rappresenta un'iperbole equilatera; se si esamina la formula 4a) della ipotizzata modalità basata sulla "densità" per la determinazione del numero di primi $\prod(n)$:

$$\prod(n) = (n - 1)^2 / (n \cdot \ln(n) - n + 1)$$

si evince che il numeratore $(n-1)^2$ è l'area del quadrato di coordinate $(1,1)$ $(1,n)$ $(n,1)$ (n,n) ed il denominatore $(n \cdot \ln(n) - n + 1)$ è l'area^(*) delimitata dal ramo di iperbole equilatera iscritta nel quadrato e dalla retta $y=1$; di conseguenza si ottiene una

forma geometrica di $\prod(n)$

“La quantità $\prod(n)$ di numeri primi da 2 ad n , all'aumentare di n , tende al rapporto tra l'area del quadrato di lato $n-1$ con l'area delimitata dal ramo di iperbole equilatera iscritta nel quadrato e la retta $y=1$ ”

$$(*) \int_{1,n} n/x \cdot dx = [n \cdot \ln(x)]_{1,n} = n \cdot \ln(n) \rightarrow \text{eliminazione area } (1, n) \rightarrow n \cdot \ln(n) - n + 1$$

Nel caso specifico $\prod(29) = 10$, invece la formula fornisce 11 con scarto del 10%.

E' opportuno notare nella Fig. 7b che l'area dello spicchio di iperbole equilatera è equivalente all'area sottesa dalla curva logaritmica

$$y = \ln(x) \quad \text{con } x \equiv (1, n) \quad \text{per } n = 29$$

infatti:

$$\int_{1,n} \ln(x) \cdot dx = [x \cdot \ln(x) - x]_{1,n} = n \cdot \ln(n) - n + 1$$

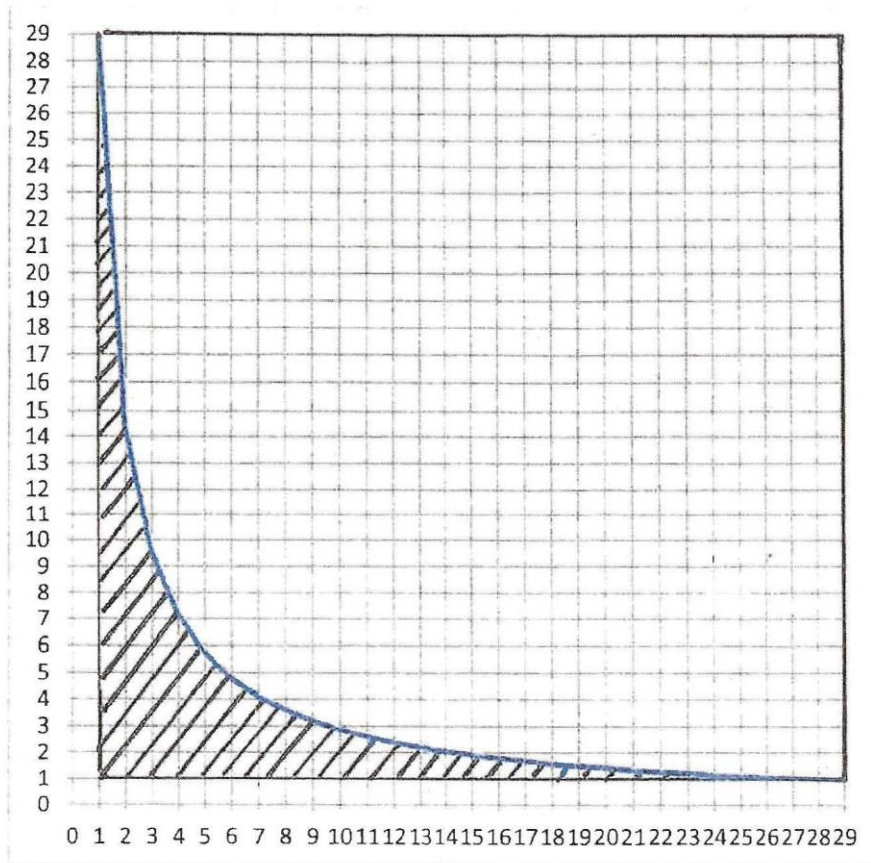


Fig. 7a

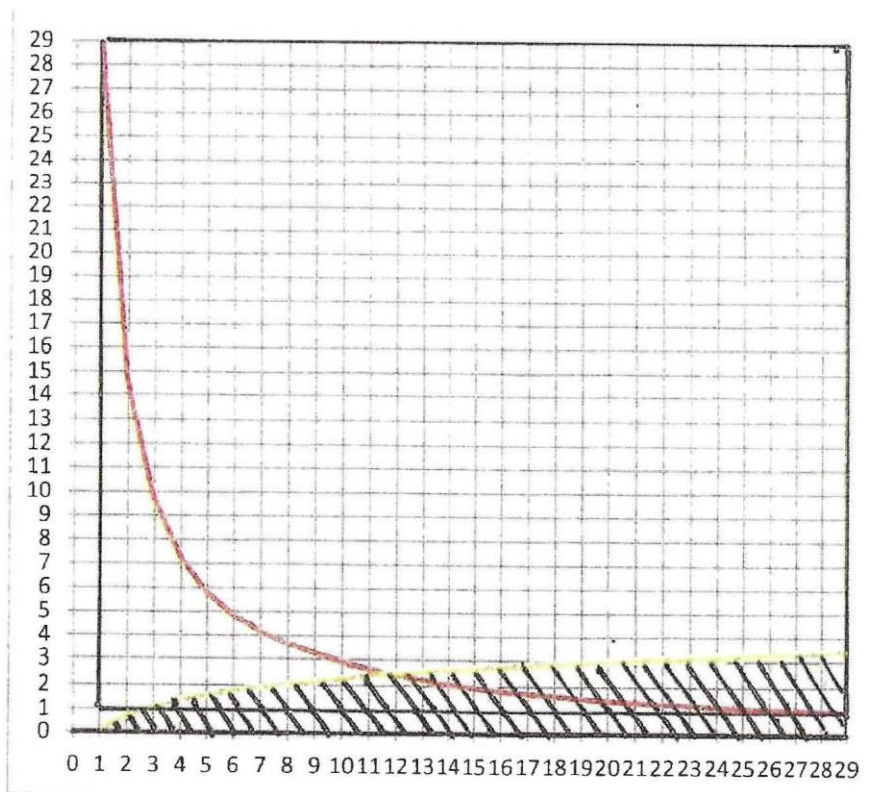


Fig. 7b

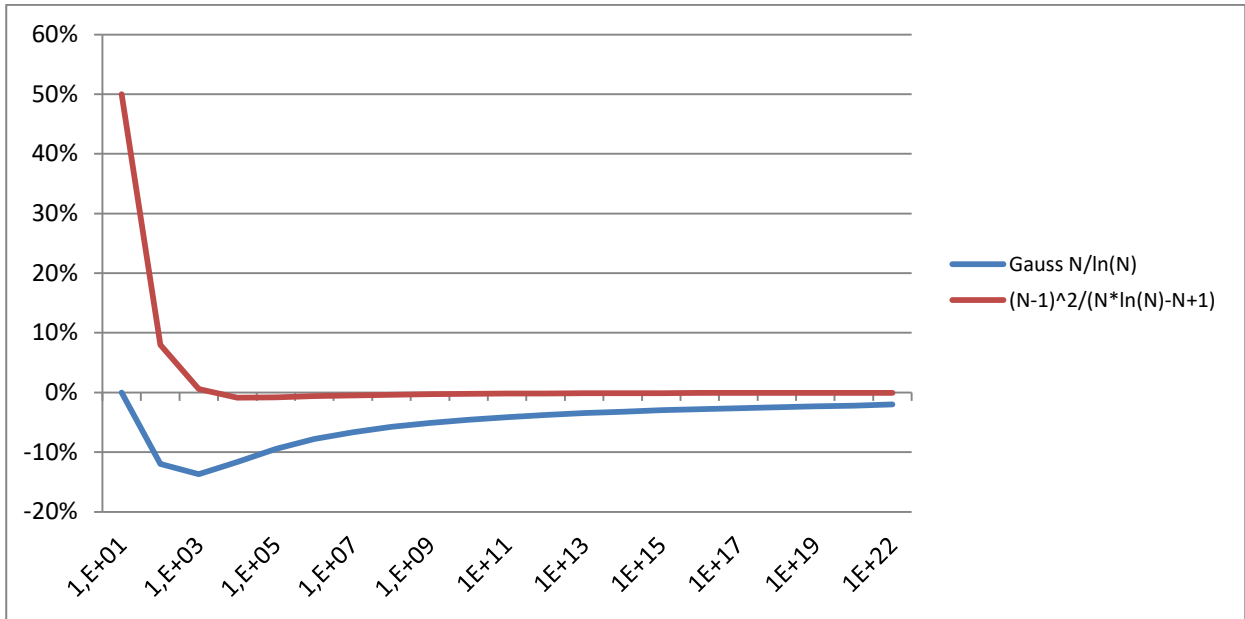


Fig. 8

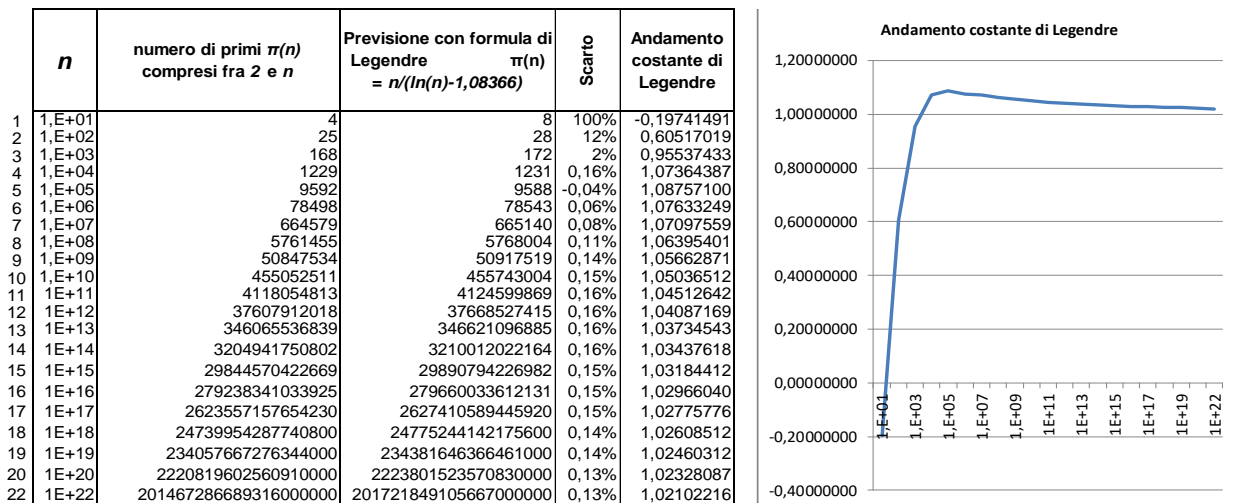


Fig. 9

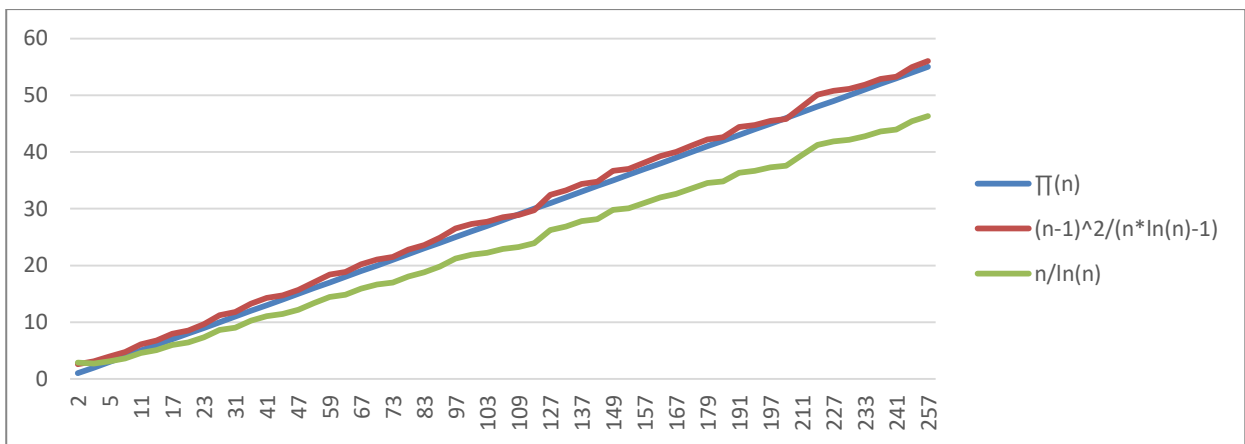


Fig. 10

Nella formula 4a) si fa notare che questa è dimensionalmente coerente con le formule di Legendre e di Gauss.

Basta sviluppare e dividere numeratore e denominatore per n :

$$(n^2 - 2 \cdot n + 1)/(n \cdot \ln(n) - n + 1) \quad \rightarrow \quad (n - 2 + 1/n)/(\ln(n) - 1 + 1/n)$$

ed applicare il limite per $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 2 + 1/n)/(\ln(n) - 1 + 1/n) \quad \rightarrow \quad n/\ln(n)$$

La Fig. 8 confronta l'andamento dello scarto tra le due formulazioni.

La Fig. 9 mostra l'andamento della costante di Legendre.

Effettivamente Legendre, applicando il valore -1.08366 , trovò risultati migliori che quelli della formula di Gauss però, ahimé, non potendo disporre delle odierne tecnologie per eseguire calcoli, dovette limitarsi a numeri non molto grandi. Il grafico potrebbe far supporre per la costante un valore tendente a 1 .

La Fig. 10 confronta la quantità reale di primi con la formula 4a) e con la formula di Gauss.